Kombinatorial dan Peluang

Adri Priadana
ilkomadri.com

Pendahuluan

Sebuah kata-sandi (*password*) panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan kata-sandi yang dapat dibuat?

```
abcdef
aaaade
a123fr
…
erhtgahn
yutresik
…
```

????

Pendahuluan

Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

Kaidah Dasar Menghitung

- Kaidah perkalian (*rule of product*)

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 **dan** percobaan 2: $p \times q$ hasil

- Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 **atau** percobaan 2: $p + q$ hasil

- **Contoh 1.**

  Ketua kelas X hanya 1 orang (pria atau wanita, tidak bias gender). Jumlah pria Kelas X = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua kelas?

  Penyelesaian: 65 + 15 = 80 cara.

- **Contoh 2.**

  Dua orang perwakilan kelas X mendatangai Bapak Dosen untuk protes nilai ujian. Wakil yang dipilih 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tesrebut?

  Penyelesaian: $65 \times 15 =$ 975 cara.

Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

Misalkan ada n percobaan, masing-masing dg p_i hasil

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

$$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n \text{ hasil}$$

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \text{ hasil}$$

Contoh 3.

Bit biner hanya terdiri dari 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:

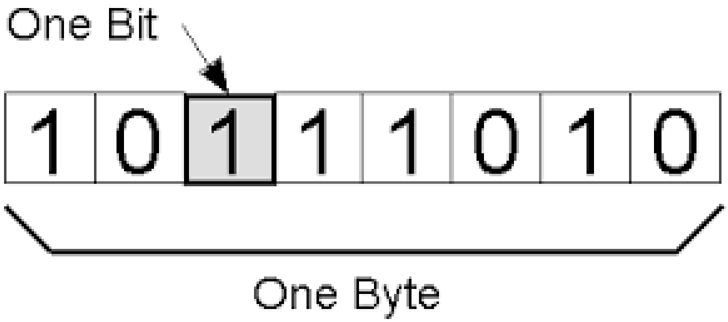
(a) panjang *string* 5 bit

(b) panjang *string* 8 bit

Penyelesaian:

(a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ buah

(b) $2^8 = 256$ buah



- **Contoh 4.** Kata-sandi (*password*) sistem komputer panjangnya 6 sampai 8 karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak kata-sandi yang dapat dibuat?

  Penyelesaian:

  Jumlah karakter password = 26 (A-Z) + 10 (0-9) = 36 karakter.

  Jumlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 6 karakter:
  $(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336$

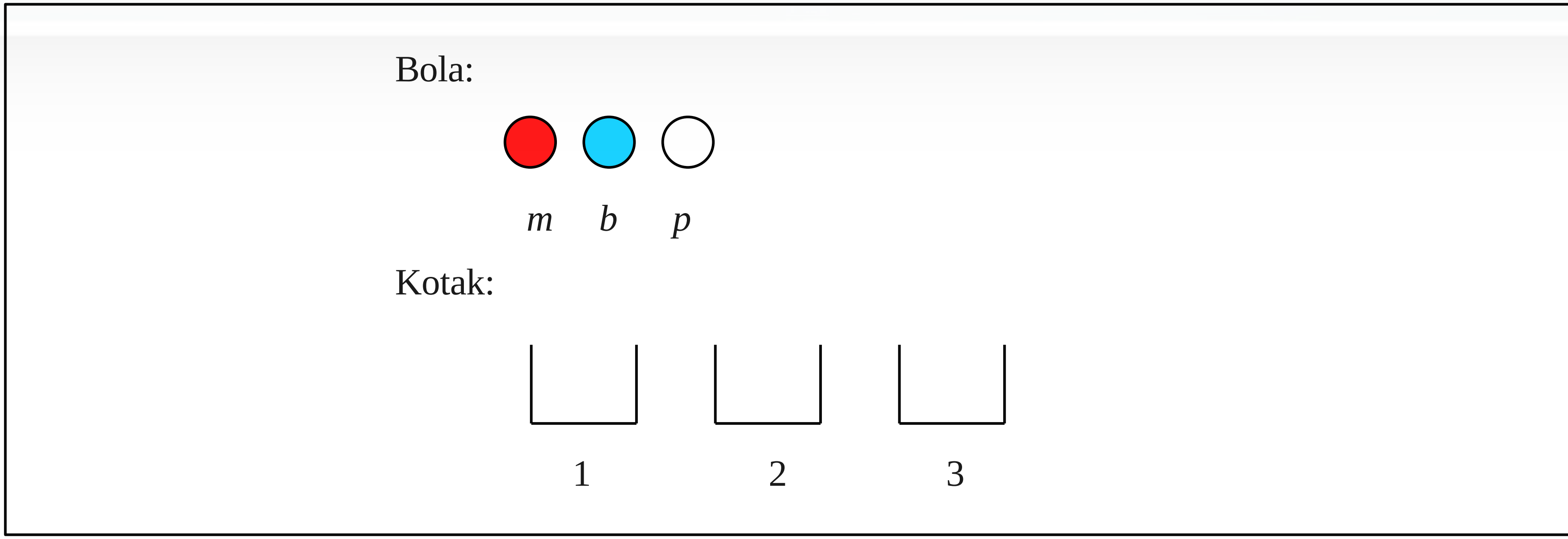
  Jumlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 7 karakter:
  $(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096$

  Jumlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 8 karakter:
  $(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^8 = 2.821.109.907.456$

  Jumlah seluruh kata-sandi (kaidah penjumlahan) adalah

  $2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456 = 2.901.650.833.888$ buah.

Permutasi



Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Kotak 1	Kotak 2	Kotak 3	Urutan
m	*b*	*p*	*mbp*
	p	*b*	*mpb*
b	*m*	*p*	*bmp*
	p	*m*	*bpm*
p	*m*	*b*	*pmb*
	b	*m*	*pbm*

Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah (3)(2)(1) = 3! = 6.

- **Definisi**: Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.
- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.
- Misalkan jumlah objek adalah n, maka

  - ✓ urutan pertama dipilih dari n objek,
  - ✓ urutan kedua dipilih dari $n – 1$ objek,
  - ✓ urutan ketiga dipilih dari $n – 2$ objek,
  - ✓ …
  - ✓ urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (2)(1) = n!$$

- **Contoh 5.**

  Berapa banyak “kata” yang terbentuk dari kata “HAPUS”?

  Penyelesaian:

  Cara 1: (5)(4)(3)(2)(1) = 120 buah kata

  Cara 2: $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

- **Contoh 6.**

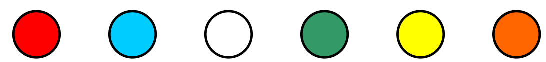
  Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

  Penyelesaian: $P(25, 25) = 25!$

Permutasi *r* dari *n* elemen

- Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Bola:



m *b* *p* *h* *k* *j*

Kotak:

|___| |___| |___|

1 2 3

<u>Penyelesaian</u>:

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120

Perampatan:

Ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola
→ (ada n pilihan) ;

kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 1) bola
→ (ada n – 1 pilihan);

kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 2) bola
→ (ada n – 2) pilihan;

…

kotak ke-r dapat diisi oleh salah satu dari (n – (r – 1) bola
→ (ada n – r + 1 pilihan)

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah: $n(n – 1)(n – 2)…(n – (r – 1))$

Permutasi *r* dari *n* elemen

Definisi 2. Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)...(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 7. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:
(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan
(b) boleh ada pengulangan angka.

Penyelesaian:

(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 60 buah
Dengan rumus permutasi $P(5, 3) = 5!/(5 - 3)! = 60$

(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.
Dengan kiadah perkalian: $(5)(5)(5) = 5^3 = 125$.

Contoh 8. Kode buku di sebuah perpustakaan panjangnya 7 karakter, terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?

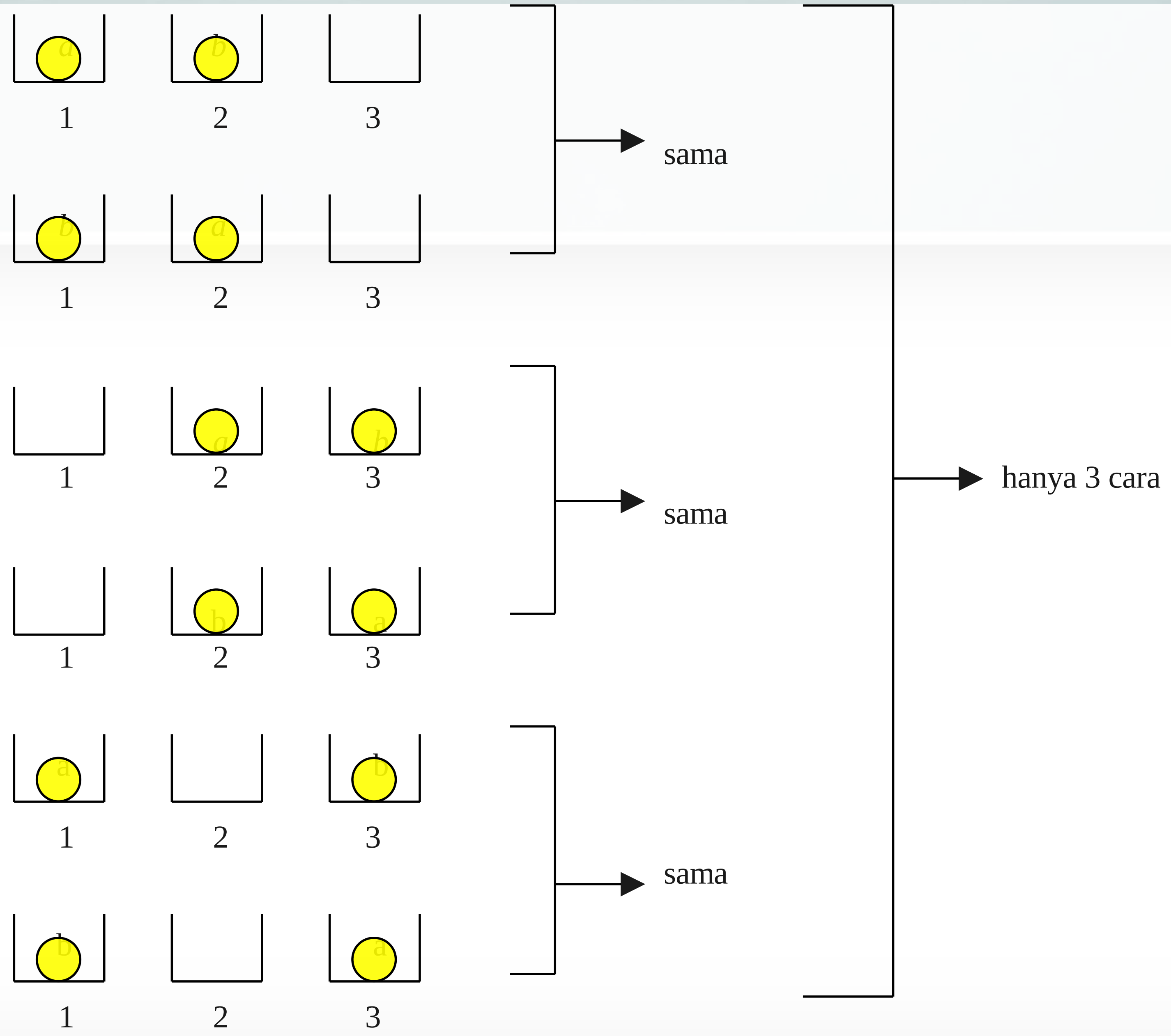
Penyelesaian: $P(26, 4) \times P(10,3) = 258.336.000$

Kombinasi

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.
- Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.

Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak =

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$


a
b
1
2
3
b
a
1
2
3
sama
a
b
1
2
3
b
a
1
2
3
sama
a
b
1
2
3
b
a
1
2
3
sama
hanya 3 cara

- Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada 3! cara memasukkan bola yang warnanya sama.

- Secara umum, jumlah cara memasukkan *r* buah bola yang berwarna sama ke dalam *n* buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r) \text{ atau} \binom{n}{r}$$

Kombinasi

- *C*(*n*, *r*) sering dibaca "*n* diambil *r*", artinya *r* objek diambil dari *n* buah objek.

- **Definisi 3.** Kombinasi *r* elemen dari *n* elemen, atau *C*(*n*, *r*), adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut *r* elemen yang diambil dari *n* buah elemen.

Interpretasi Kombinasi

1. $C(n, r)$ = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari r elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan n elemen.

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$

Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen:

$$\left.\begin{array}{l} \{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\} \end{array}\right\rangle \quad 3 \text{ buah}$$

atau $\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$ buah

2. $C(n, r)$ = cara memilih r buah elemen dari n buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

Contoh: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

Penyelesaian:

Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Misalkan: ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*).

n_1 bola diantaranya berwarna 1,
n_2 bola diantaranya berwarna 2,
$\vdots$
n_k bola diantaranya berwarna k,

dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maks. 1 buah bola)?

Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah:

$$P(n, n) = n!.$$

Dari pengaturan n buah bola itu,

ada n_1! cara memasukkan bola berwarna 1

ada n_2! cara memasukkan bola berwarna 2

$\vdots$

ada n_k! cara memasukkan bola berwarna k

Permutasi n buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, …, n_k bola berwarna k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1)\, C(n - n_1, n_2)\, C(n - n_1 - n_2, n_3) \ldots C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_k)!} \ldots \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Contoh 10. Berapa banyak "kata" yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

Penyelesaian:

$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$

huruf M = 1 buah (n_1)

huruf I = 4 buah (n_2)

huruf S = 4 buah (n_3)

huruf P = 2 buah (n_4)

$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$ buah = $|S|$

Cara 1: Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650 \text{ buah.}$$

Cara 2: Jumlah *string* = $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)}$$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)}$$

= 34650 buah

Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat r buah bola yang semua warnanya sama dan n buah kotak.

(i) Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n, r)$.

(ii) Masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n + r - 1, r)$.

Contoh 13. Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, x_i adalah bilangan bulat ≥ 0. Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Penyelesaian:

- Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini, $n = 4$ dan $r = 12$).
- Bagilah keduabelas bola itu ke dalam tiap kotak. Misalnya,

  Kotak 1 diisi 3 buah bola ($x_1 = 3$)
  Kotak 2 diisi 5 buah bola ($x_2 = 5$)
  Kotak 3 diisi 2 buah bola ($x_3 = 2$)
  Kotak 4 diisi 2 buah bola ($x_4 = 2$)
  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$

  Ada C(4 + 12 – 1, 12) = C(15, 12) = 455 buah solusi.

Matur Nuwun ☺