

Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

Adri Priadana
ilkomadri.com

Pengertian

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan **vektor eigen** dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut **nilai eigen** dari A dan x dikatakan vektor eigen yang **bersesuaian** dengan λ .

Menghitung Nilai Eigen

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka kita menuliskan kembali sebagai

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \text{ atau } (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Dan persamaan diatas akan mempunyai penyelesaian jika $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$

Persamaan diatas disebut persamaan karakteristik A . Mencari nilai eigen berarti menghitung determinan tersebut sehingga diperoleh nilai-nilai λ .

Menghitung Nilai Eigen

Contoh

Tentukan nilai eigen untuk matriks berikut:

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Menghitung Nilai Eigen

Jawab

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Kita gunakan persamaan $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Menghitung Nilai Eigen

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$(5 - \lambda)(4 - \lambda) - (1 * 2) = 0$$

$$(\lambda^2 - 9\lambda + 20) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$$

Maka nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$

Menghitung Nilai Eigen

Apabila nilai-nilai eigen diketahui, kemudian nilai-nilai ini dimasukkan ke persamaan:

$$(A - \lambda I) x = 0$$

maka akan diperoleh vektor-vektor eigen x yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Menghitung Vektor Eigen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks di atas tadi telah kita ketahui nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, maka masukan nilai-nilai tersebut ke persamaan **$(A - \lambda I) x = 0$**

Menghitung Vektor Eigen

Nilai eigen $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$,

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

untuk $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Menghitung Vektor Eigen

Maka akan diperoleh persamaan

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} x_1 = -\frac{1}{2} x_2$$

maka vektor eigen yang berkaitan dgn $\lambda_1 = 3$

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Menghitung Vektor Eigen

untuk $\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Maka akan diperoleh persamaan

$$\begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array}} \right\} x_1 = x_2$$

maka vektor eigen yang berkaitan dgn $\lambda_2 = 6$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Bagaimana jika matriks yang kita cari nilai eigen dan vektor eigennya adalah matriks berordo 3x3?

Contoh

Tentukan Nilai Eigen dan Vektor Eigen untuk

$$\text{matriks } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} !$$

Matur Nuwun 😊