Relasi

Adri Priadana

ilkomadri.com

Relasi

- Hubungan antara elemen himpunan dengan elemen himpunan lain dinyatakan dengan struktur yang disebut *relasi*.
- Relasi antara himpunan A dan B disebut relasi biner, didefinisikan sebagai berikut :
  - Relasi biner R antara A dan B adalah himpunan bagian dari A x B.
  - Notasi : $\mathbf{R \subseteq (A \times B)}$

Relasi

- Contoh :

  A = {2, 3, 4}   dan   B = {2, 4, 8, 9, 15}

  Didefinisikan relasi R dari A ke B dengan syarat

  $(a, b) \in R$ jika a habis membagi b

  Maka diperoleh :

  R = { (2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15), (4, 4), (4, 8) }

- A merupakan daerah asal (domain)
- B merupakan daerah hasil (kodomain)

Representasi Relasi

1. **Dengan Tabel**

   R = { (2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15), (4, 4), (4, 8) }

A	B
2	2
2	4
2	8
3	9
3	15
4	4
4	8

Representasi Relasi

2. Dengan Matriks

A = {2, 3, 4}   dan   B = {2, 4, 8, 9, 15}

(a, b) $\in$ R jika a habis membagi b

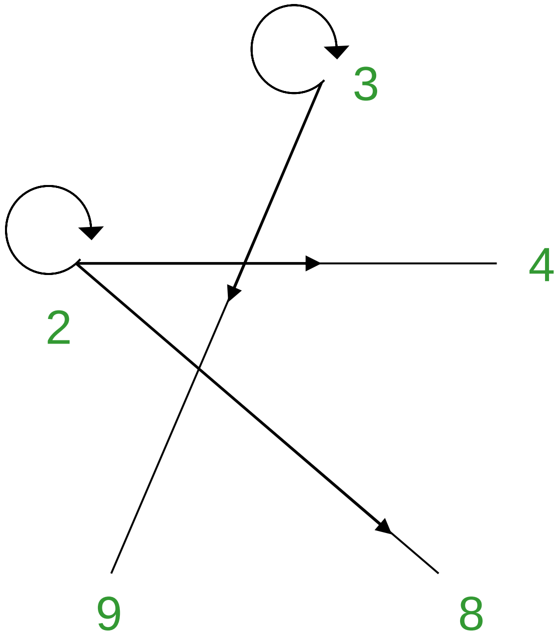
R = { (2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15), (4, 4), (4, 8) }

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 2 & 4 & 8 & 9 & 15 \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Representasi Relasi

3. Dengan Graf

Relasi R = { (2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9) }



Relasi Inversi

- Jika diberikan relasi R pada himpunan A ke himpunan B, kita bisa mendefinisikan relasi baru dari B ke A dengan cara membalik urutan dari setiap pasangan terurut di dalam R.
- Relasi baru tersebut dinamakan inversi dari relasi semula.

Contoh Relasi Inversi

Misalkan $P = \{2,3,4\}$ dan $Q = \{2,4,8,9,15\}$

Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$$(p,q) \in R \quad jika\ \ p\ habis\ membagi\ q$$

Maka kita peroleh

$$R = \{(2,2),(2,4),(4,4),(2,8),(4,8),(3,9),(3,15)\}$$

R^{-1} adalah *invers* dari relasi *R*, yaitu dari *Q* ke *P* dengan

$$(q,p) \in R^{-1} \quad jika\ q\ adalah\ kelipatan\ dari\ p$$

Maka kita peroleh

$$R^{-1} = \{(2,2),(4,2),(4,4),(8,2),(8,4),(9,3),(15,3)\}$$

Contoh Relasi Inversi

Jika *M* adalah matriks yang merepresentasikan relasi *R*,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan *N*

$$N = M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mengkombinasikan Relasi

- Apabila sebuah relasi direpresentasikan dengan matriks maka untuk mengkombinasikan relasi tersebut bisa menggunakan notasi :

  $R1 \cap R2$

  $R1 \cup R2$

  $R1 - R2$

  $R2 - R1$

  $R1 \oplus R2$

Contoh

$A = \{a,b,c\}$ dan $B = \{a,b,c,d\}$.
Relasi $R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ dan
Relasi $R_2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d)\}$ adalah relasi dari A ke B

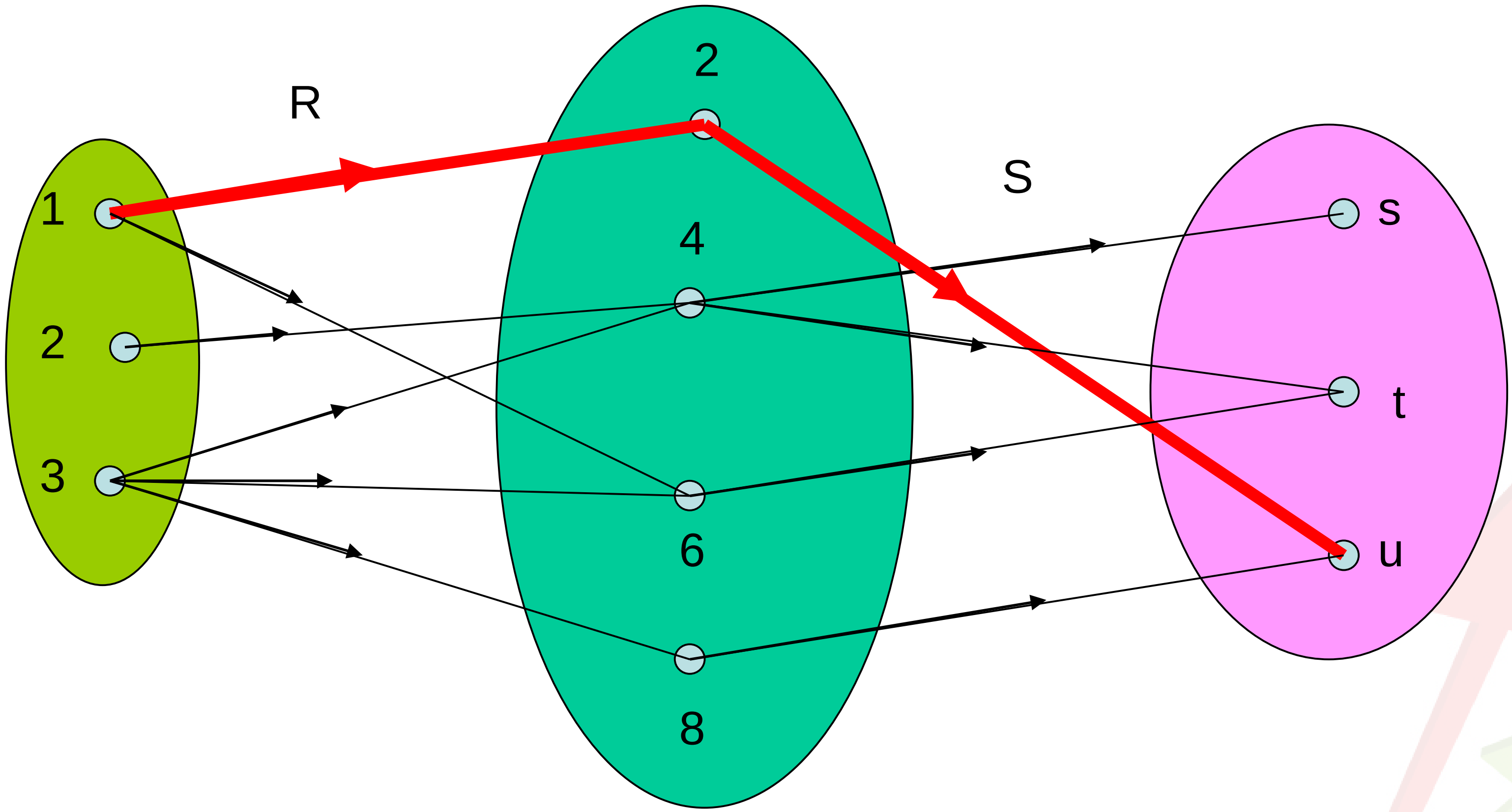
$R1 \cap R2 = \{(a,a)\}$
$R1 \cup R2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(a,d)\}$
$R1 - R2 = \{(b,b),(c,c)\}$
$R2 - R1 = \{(a,b),(a,c),(a,d)\}$
$R1 \oplus R2 = \{(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(a,d)\}$

Komposisi Relasi

Definisi :

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S , dinotasikan dengan $S \circ R = \{ (a, c) \mid a \in A, c \in C,$ dan untuk beberapa $b \in B, (a, b) \in R,$ dan $(b, c) \in S \}$

Contoh



Contoh

Apabila direpresentasikan dengan matriks :

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad dan \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka matriks yang menyatakan R_2 o R_1 adalah

$$M_{R2\,0\,R1} = M_{R1} \cdot M_{R2} = \begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Relasi Biner

Relasi biner yang didefinisikan pada sebuah himpunan mempunyai beberapa sifat, yaitu :

- Refleksif
- Setangkup dan Tolak Setangkup

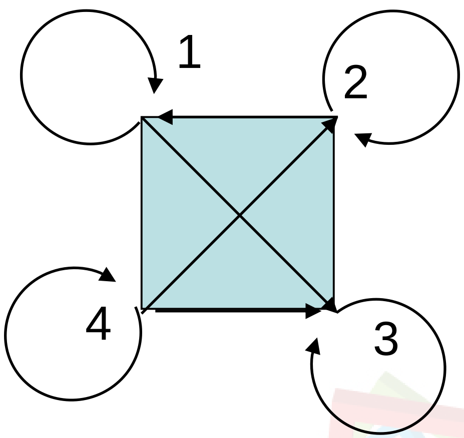
  (*Symmetric & Anti Symmetric*)
- Menghantar / *Transitive*

Refleksif

- Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika

  (a, a) $\in$ R untuk setiap a $\in$ A
- Jika direpresentasikan dengan matriks maka elemen pada diagonalnya semua bernilai 1.
- Jika di representasikan dalam bentuk graf berarah, maka dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$



Contoh :

Misalkan A={1,2,3,4} dan relasi R dibawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

a. Relasi R = {(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)} bersifat reflektif karena terdapat elemen yang berbentuk (a,a), yaitu (1,1),(2,2),(3,3) dan (4,4).

b. Relasi R = {(1,1),(2,2),(2,3),(4,2),(4,3),(4,4)} tidak bersifat reflektif karena (3,3) $\notin$ R.

Setangkup

Definisi :

- Relasi R pada himpunan A disebut setangkup jika (a, b) $\in$ R, maka (b, a) $\in$ R, untuk semua a,b $\in$ A

Contoh :

- Misalkan A={1,2,3,4} dan relasi R dibawah ini

  didefinisikan pada himpunan A, maka

  a. Relasi R = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4) }

     bersifat setangkup karena jika (a, b) $\in$ R maka (b, a) juga $\in$ R.

     Disini (1, 2) dan (2, 1) $\in$ R begitu juga (2, 4) dan (4, 2) $\in$ R

  b. Relasi R = { (1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } tidak setangkup karena (2, 3) $\in$ R, tetapi (3, 2) $\notin$ R

Tolak Setangkup

Relasi R pada himpunan A disebut tolak setangkup jika $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ maka $a = b$, untuk semua $a, b \in A$

Contoh :

- Relasi R { (1, 1), (2, 2), (3, 3) } tolak setangkup

  karena $(1,1) \in R$ dan 1=1 , $(2,2) \in R$ dan 2=2 , $(3,3) \in R$ dan 3=3. Perhatikan bahwa R juga setangkup.

- Relasi R {(1,1),(1,2),(2,2),(2,3)} tolak setangkup

  karena $(1,1) \in R$ dan 1=1 , dan $(2,2) \in R$ dan 2=2.

  Perhatikan bahwa R tidak setangkup.

Tidak Tolak Setangkup

- Relasi R {(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)} tidak tolak setangkup karena (1,2) $\in$ R dan (2,1) $\in$ R , tetapi $2 \neq 1$.

  Perhatikan bahwa R setangkup
- Relasi R = {(1,2),(2,3),(1,3)} tidak setangkup tetapi tolak setangkup.

Menghantar / Transitive

- Relasi R pada himpunan A disebut menghantar jika (a, b) ∈ R dan (b, c) ∈ R, maka (a, c) ∈ R, untuk a, b, c ∈ A
- Misalkan A={1, 2, 3, 4} dan relasi R dibawah ini

  didefinisikan pada himpunan A, maka

  Relasi R { (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3) } bersifat menghantar.

  Periksa dengan membuat tabel berikut :

Pasangan berbentuk

(a,b)	(b,c)	(a,c)
(3,2)	(2,1)	(3,1)
(4,2)	(2,1)	(4,1)
(4,3)	(3,1)	(4,1)
(4,3)	(3,2)	(4,2)

Contoh lain

- R = { (1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } tidak menghantar karena (2, 4) dan (4, 2) ∈ R, tetapi (2, 2) ∉ R, begitu juga (4, 2) dan (2, 3) ∈ R, tetapi (4, 3) ∉ R

Pasangan berbentuk

(a,b)	(b,c)	(a,c)
(2,4)	(4,2)	~~(2,2)~~
(4,2)	(2,3)	~~(4,3)~~

- Relasi R yang hanya berisi satu elemen seperti R = {(4,5)} menghantar karena tidak ada (a, b) ∈ R dan (b, c) ∈ R, sedemikian sehingga (a, c) ∈ R

Relasi Kesetaraan

- Relasi *R* pada himpunan *A* disebut **relasi kesetaraan** (*equivalence relation*) jika ia refleksif, setangkup dan menghantar.

Klosur Relasi

- Bagaimana membentuk sebuah relasi yang reflexive, symmetric, atau transitive.

- Klosur : menentukan/membuat relasi baru yang mengandung R (relasi lama) sedemikian sehingga relasi baru tersebut menjadi bentuk reflexive/symmetric/transitive.

- Klosur reflexive, klosur symmetric, klosur transitive.

Klosur Reflexive

- Klosur reflexive dari suatu relasi R pada himpunan A adalah $R \cup \Delta$ dimana $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$

- Misal : $A = \{1,2,3\}$, dan

  $R = \{(1,1), (1,3), (2,3), (3,2)\}$

Maka $R \cup \Delta$ adalah?

Cukup menambahkan $\Delta = (2, 2)$ dan $(3, 3)$

$R \cup \Delta = \{(1,1), (1,3), (2, 2), (2,3), (3,2), (3, 3)\}$

Klosur Symmetric

- Klosur symmetric dari suatu relasi R pada himpunan A adalah $R \cup R^{-1}$ dimana

  $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

- Misal : $A = \{1,2,3\}$, dan

  $R = \{(1,3), (1,2), (2,1), (3,2), (3,3)\}$

Maka $R \cup R^{-1}$ adalah?

Cukup menambahkan $R^{-1} = \{ (3, 1), (2, 3) \}$

$R \cup R^{-1} = \{(1,3),(3,1),(1,2),(2,1),(2,3)(3,2),(3,3)\}$

Klosur Transitive

- Pembentukan klosur menghantar lebih sulit daripada dua buah klosur sebelumnya.
- Klosur menghantar dari *R* adalah

$$R^* = R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$$

- Jika M_R adalah matriks yang merepresentasikan *R* pada sebuah himpunan dengan *n* elemen, maka matriks klosur menghantar R^* adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \ldots \vee M_R^{[n]}$$

Misalkan $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ adalah relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$.
Tentukan klosur menghantar dari R.

Penyelesaian:

Matriks yang merepresentasikan relasi R adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka, matriks klosur menghantar dari *R* adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]}$$

Karena

$$M_R^{[2]} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad M_R^{[3]} = M_R^{[2]} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian,

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Catatan

Untuk

$$M_{R1} \cdot M_{R2}$$

yang dalam hal ini operator "." sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan "$\wedge$" dan tanda tambah dengan "$\vee$".

Relasi n-ary

Relasi n-ary adalah relasi yang menghubungkan lebih dari dua himpunan.

Contoh

NIM = {13598011, 13598014, 13598015, 13598019, 13598021, 13598025}
Nama = {Amir, Santi, Irwan, Ahmad, Cecep, Hamdan }
MatKul = {Matematika Diskrit, Algoritma, Struktur Data, Arsitektur Komputer}
Nilai = {A, B, C, D, E}

MHS = {(13598011, Amir , Matematika Diskrit , A),
(13598011, Amir , Arsitektur Komputer, B), ………………}

NIM	*Nama*	*MatKul*	*Nilai*
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Irwan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

file

NIM	*Nama*	*JK*
13598001	**Hananto**	**L**
13598002	**Guntur**	**L**
13598004	**Heidi**	**W**
13598006	**Harman**	**L**
13598007	**Karim**	**L**

record

atribut

Basisdata (database) adalah kumpulan tabel.
Setiap kolom pada tabel disebut atribut.
Setiap tabel pada basisdata di implementasikan secara fisik sebagai sebuah file.
Satu baris data pada tabel menyatakan sebuah record, dan setiap atribut menyatakan field.

Dengan kata lain, secara fisik basisdata adalah kumpulan file,
sedangkan file adalah kumpulan record,
setiap record terdiri atas sejumlah field.

Operasi yang dilakukan terhadap basisdata biasanya dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut *query*.

Contoh query :

"Tampilkan semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit"

Seleksi → σ

Operasi seleksi :

$$\sigma_{MatKul="Matematika Diskrit"}(MHS)$$

Yang menghasilkan tupel (13598011, Amir , Matematika Diskrit , A)

dan (13598025, Hamdan , Matematika Diskrit , B)

Proyeksi → π

Operasi proyeksi :

$$\pi_{Nama,MatKul,Nilai}(MHS)$$

Nama	*MatKul*	*Nilai*
Amir	Matematika Diskrit	A
Amir	Arsitektur Komputer	B
Santi	Algoritma	D
Irwan	Algoritma	C
Irwan	Struktur Data	C
Irwan	Arsitektur Komputer	B
Ahmad	Algoritma	E
Cecep	Algoritma	B
Cecep	Arsitektur Komputer	B
Hamdan	Matematika Diskrit	B
Hamdan	Algoritma	A
Hamdan	Struktur Data	C
Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Operasi proyeksi :

$$\pi_{NIM,Nama}(MHS)$$

NIM	Nama
13598011	Amir
13598011	Amir
13598014	Santi
13598015	Irwan
13598015	Irwan
13598015	Irwan
13598019	Ahmad
13598021	Cecep
13598021	Cecep
13598025	Hamdan
13598025	Hamdan
13598025	Hamdan
13598025	Hamdan

Join → τ

Operasi Join :

$$\tau_{NIM,Nama}(MHS1, MHS2)$$

NIM	Nama	JK
13598001	Hananto	L
13598002	Guntur	L
13598004	Heidi	W
13598006	Harman	L
13598007	Karim	L

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	Algoritma	A
13598001	Hananto	Basisdata	B
13598004	Heidi	Kalkulus 1	B
13598006	Harman	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	Agama	A
13598009	Junaidi	Statistik	B
13598010	Farizka	Otomata	C

NIM	Nama	JK	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	L	Algoritma	A
13598002	Guntur	L	Basisdata	B
13598004	Heidi	W	Kalkulus 1	B
13598006	Harman	L	Teori Bahasa	C
13598007	Karim	L	Agama	A

SQL (Structured Query Language)

Bahasa khusus untuk query di dalam basisdata disebut SQL

```
SELECT  NIM,  Nama,  MatKul,  Nilai
FROM  MHS
WHERE  MatKul  =  'Matematika Diskrit'
```

Adalah bahasa *SQL* yang bersesuaian untuk *query* abstrak

$$\sigma_{MatKul="Matematika Diskrit"}(MHS)$$

Yang menghasilkan tupel (13598011, Amir , Matematika Diskrit , A)

dan (13598025, Hamdan , Matematika Diskrit , B)

Matur Nuwun ☺